DOI:10.17951/h.2016.50.4.89

A N N A L E S
U N I V E R S I T A T I S M A R I A E C U R I E - S K Ł O D O W S K A
L U B L I N – P O L O N I A

VOL. L, 4 SECTIO H 2016

Uniwersytet Łódzki. Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny

CZESŁAW KAZIMIERZ DOMAŃSKI, ALINA JĘDRZEJCZAK

czedoman@uni.lodz.pl, jedrzej@uni.lodz.pl

Testy zgodności oparte na momentach

Consistency Tests Based on Moments

Słowa kluczowe: testy zgodności

Keywords: consistency tests

Kod JEL: G00; G10; G17

Wstęp

Przypuśćmy, że rozważamy pewien materiał empiryczny dotyczący jakiejś zmiennej losowej X. Często interesuje nas odpowiedź na pytanie, jaki rozkład ma badana zmienna w populacji generalnej. Hipoteza dotyczy bądź nieznanego kształtu rozkładu, bądź tego, że rozpatrywana zmienna losowa ma rozkład należący do określonej rodziny, a więc że jej dystrybuanta należy do odpowiedniej rodziny dystrybuant. Przy zastosowaniu testów parametrycznych i metod estymacji najczęściej musimy znać kształt rozkładu badanej zmiennej.

Czasami jednak posiadamy bardzo mało informacji o populacji, stawiamy wówczas hipotezę, że badana zmienna X ma taki a taki rozkład i na podstawie wylosowanej próby sprawdzamy, czy należy tę hipotezę odrzucić czy też materiał empiryczny nie daje podstaw do tego, aby ją odrzucić. Testy takie stanowią ogólniejszą grupę, gdyż dotyczą nie poszczególnych parametrów, lecz całej funkcji rozkładu. Testy takie noszą nazwę testów zgodności.

Konstrukcja testów zgodności wymaga wprowadzenia pewnej miary odległości rozkładów. Istnieje kilka sposobów określania odległości pomiędzy porównywanymi rozkładami. Najczęściej taka miara jest oparta na porównaniu dystrybuant rozkładu empirycznego $F_n(x)$ i rozkładu teoretycznego $F(x)$ w następującej postaci:

$$\delta_1 = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \tag{1}$$

Rozpatruje się również dwa warianty tej miary:

$$\delta_2 = \sup_x [F_n(x) - F(x)] \tag{2}$$

$$\delta_3 = \sup_x [F(x) - F_n(x)] \tag{3}$$

Porównując z kolei gęstość rozkładów, otrzymujemy inną miarę:

$$\delta_4 = \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x) - f(x)]^2 dx \tag{4}$$

Natomiast porównując funkcje prawdopodobieństwa, mamy:

$$\delta_5 = \sum_{i=1}^{\infty} [P_n(x_i) - P(x_i)]^2 \tag{5}$$

W szczególnym przypadku, porównując liczebność empiryczną n_i z liczebnościami teoretycznymi $(\boldsymbol{p}_i)$, otrzymujemy:

$$\delta_6 = \sum_{i=1}^{\infty} (n_i - np_i)^2 \tag{6}$$

Ogólnie można zdefiniować odległość pomiędzy dwoma rozkładami o gęstościach $f_n(x)$ i $f(x)$:

$$\delta = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \tag{7}$$

gdzie:
A jest zbiorem, na którym określone są funkcje $f_n(x)$ i $f(x)$

Zauważmy, że niemal wszystkie testy zgodności są oparte na mutacjach jednej z wymienionych miar odległości.

Przedstawione miary odległości nie wyczerpują wszystkich możliwości określania odchyleń między rozkładami.

Niech $X_1,\ldots,X_n$ będzie próbą losową o ciągłym rozkładzie z dystrybuantą $F(x)$. Hipotezę o zgodności rozkładu empirycznego z rozkładem teoretycznym formułujemy w następujący sposób. Niech $\widetilde{F}$ oznacza klasę dystrybuant zmiennych losowych, $\widetilde{F}_N$ klasę dystrybuant rozkładu normalnego, $\widetilde{F}_w$ klasę dystrybuant rozkładu wykładniczego, a $\widetilde{G}$ klasę dystrybuant zmiennych losowych mających różny od zera trzeci moment centralny μ_3 i skończony czwarty moment centralny μ_4, przy czym $\widetilde{F} \cap \widetilde{G} = \varnothing$.

Określamy hipotezę $H_0 : F(x) \in \widetilde{F}$ oraz alternatywną hipotezę $H_1 : F(x) \in \widetilde{G}$, że funkcja $F(x)$ należy do klasy dystrybuant $\widetilde{F}$ lub $\widetilde{G}$. Hipotezy H_0 lub H_1 będą nazwane prostymi, jeśli rozkłady należące do klasy $\widetilde{F}$, $\widetilde{F}_N$ lub $\widetilde{G}$ mają znane parametry rozkładu. W przypadku, gdy parametry rozkładów zmiennych losowych szacujemy na podstawie próby, wówczas hipotezy H_0 i H_1 nazwane będą hipotezami złożonymi. Zgodnie z ogólnie przyjętą symboliką, wskaźnik w nawiasie oznacza numer odpowiedniego elementu w próbie uporządkowanej w ciąg niemalejący obserwacji $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$.

Testy zgodności, w zależności od konstrukcji funkcji testowych (sprawdzianu testu), możemy podzielić na pięć klas:

A – testy oparte na porównaniu gęstości.

B – testy oparte na porównaniu dystrybuant.

C – testy oparte na momentach.

D – testy oparte na statystykach pozycyjnych.

F – testy oparte na złożonych charakterystykach zmiennej losowej.

1. Testy normalności oparte na momentach

Przechodząc do testów opartych na momentach lub ich funkcjach, przypomnijmy kilka pojęć. Dla *n*-elementowej próby określamy moment centralny *k*-tego rzędu:

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^k, k = 2,3,\ldots \tag{8}$$

Statystyki:

$$\sqrt{b_1} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}} \quad i \quad b_2 = \frac{m_4}{m_2^2} \tag{9}$$

są nieobciążonymi estymatorami parametrów:

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad i \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \tag{10}$$

Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład normalny o parametrach μ i σ, to wiadomo, że $\mu_3 = 0,\ \mu_4 = 3\sigma^4$, stąd $\sqrt{\beta_1} = 0 \quad i \quad \beta_2 = 3.$ Oznacza to, że jeśli parametry $\left(\sqrt{\beta_1}, \beta_2\right) = (0,3)$, to rozkład zmiennej losowej X uważamy za „prawie normalny".

Konstruując testy normalności oparte na momentach, korzysta się z twierdzenia Słuckiego, z którego wynika, że $\sqrt{b_1}$ i b_2 są zbieżne do $\sqrt{\beta_1}$ i β_2, gdy $n \to \infty$. Wartości oczekiwane i wariancje statystyk (9) przy założeniu prawdziwości hipotezy $H_0 : F(x) \in F_N(x)$ są następujące:

$$E\left(\sqrt{b_1}\right) = 0;\ D^2\left(\sqrt{b_1}\right) = \begin{cases} \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}, \\ \frac{6}{n}, dla\ dużych\ n, \end{cases} \tag{11}$$

$$E(b_2) = \begin{cases} \frac{3(n-1)}{n+1}, \\ 3, dla\ dużych\ n, \end{cases}$$

$$D^2(b_2) = \begin{cases} \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}, \\ \frac{24}{n}, dla\ dużych\ n. \end{cases} \tag{12}$$

Do omawianej klasy należą następujące testy: test oparty na trzecim momencie centralnym, test oparty na standaryzowanym czwartym momencie centralnym, test D'Agostino-Pearsona, test Bowmana-Shentona, test Pearsona-D'Agostino-Bowmana, Jarque-Bera i jego modyfikacje.

Test oparty na trzecim momencie centralnym:

$$\sqrt{b_1} = \frac{m_3}{\sqrt{m^3}} \tag{13}$$

jest stosowany wobec hipotezy alternatywnej, że rozkłady z klasy $\widetilde{G}$ są rozkładami skośnymi $H_1 : \sqrt{\beta_1} \neq 0.$ Wartości krytyczne dla $n > 25$ podał H.P. Muldholland [1977], a dla $n > 25$ E.S. Pearson i H.O. Hartley [1966, 1972].

Test oparty na standaryzowanym czwartym momencie centralnym:

$$b_2 = \frac{m_4}{m_2^2} \tag{14}$$

jest stosowany przeciwko hipotezie alternatywnej, orzekającej, że rozkłady z próby są symetryczne, o spłaszczeniu odbiegającym od rozkładu normalnego. Wartości krytyczne dla $n \geq 50$ podali E.S. Pearson i H.O. Hartley [1966, 1972].

Do zadanej statystyki b_2, określonej wzorem (14), wyznaczamy prawdopodobieństwo $P\{b_2 \leq b_2(\alpha, n)\} = \alpha$, gdzie $b_2(\alpha, n)$ jest kwantylem rozkładu b_2 dla ustalonych α i n, które można odczytać z monogramów zbudowanych przez R.B.

D'Agostino i E.S. Pearsona [1973]. Wyznaczamy następnie kwantyl $X(b_2) = \phi^{-1}(\alpha)$ rzędu α rozkładu N(0,1). Dla rozkładu statystyki (13) kwantyl jest określony wzorem:

$$X\left(\sqrt{b_1}\right) = \delta \ln \sqrt{b_1} / \lambda + \left[\left(\sqrt{b_1}/\lambda\right)^2 + 1\right]^{1/2} \tag{15}$$

gdzie stałe δ i $1/\lambda$ są stablicowane przez R.B. D'Agostino i E.S. Pearsona dla n=8, 9, …, 50, 52, …, 100, 105, …, 250, 260, …, 500, 520, …, 1000.

Test D'Agostino-Pearsona jest oparty na funkcji momentów centralnych i jego funkcja testowa przyjmuje postać:

$$K^2 = X^2\left(\sqrt{b_1}\right) + X^2(b_2) \tag{16}$$

Statystyka (16) przy prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład χ^2 o dwóch stopniach swobody. Zaletą testu K^2 jest to, że jednocześnie bada odstępstwa od normalności wywołane przez skośności i spłaszczenie. Test o takich własnościach nazywamy testem omnibus. Dla $n > 200$ stosujemy modyfikację testu K^2, którego funkcję testową określamy następująco:

$$K^2 = \frac{n}{24}\left[4\left(\sqrt{b_1}\right)^2 + (b_2 - 3)^2\right] \tag{17}$$

Statystyka (17) ma asymptotyczny rozkład χ^2 o dwóch stopniach swobody.

Funkcja testowa testu Bowmana-Shentona ma następującą postać:

$$Y_S^2 = X_S^2\left(\sqrt{b_1}\right) + X_S^2(b_2) \tag{18}$$

gdzie:

$$X_S(b_1) = \delta_1 \sin h^{-1}\left(\sqrt{b_1}/\lambda_1\right)$$

$$X_S(b_2) = \gamma_2 + \delta_2 \sin h^{-1}[(b_2 - \xi)/\lambda_2], \quad \text{n} \geq 25$$

$$X_S(b_2) = \gamma_2 + \delta_2 \ln \frac{b_2 - \xi}{\xi + \lambda_2 - b_2}, \quad \text{n} < 25$$

przy czym stałe $\delta_1, \gamma_2, \delta_2, \lambda_1, \lambda_2$ wyznacza się metodą podaną przez E.S. Pearsona i H.O. Hartleya. Statystyka (18) przy prawdziwości hipotezy H_0 ma w przybliżeniu rozkład χ^2 o dwóch stopniach swobody. Wartości krytyczne dla tego testu, wygenerowane metodą Monte Carlo dla n=20; 50; 100; 150; 200; 300; 500; 1000, podali K.O. Bowman i L.R. Shenton. Podobnie jak test D'Agostino-Pearsona, test Y_s^2 jest testem omnibus.

Test Pearsona-D'Agostino-Bowmana jest oparty na statystyce R, którą określa funkcja punktów $\left(\sqrt{b_1}, b_2\right)$, jakie należą do prostokąta o współrzędnych: $\left\{-\sqrt{b_1}\left(\alpha^{'}\right), {}_2b_2\left(\alpha^{'}\right)\right\}$, $\left\{\sqrt{b_1}\left(\alpha^{'}\right), {}_2b_2\left(\alpha^{'}\right)\right\}$, $\left\{-\sqrt{b_1}\left(\alpha^{'}\right), {}_1b_2\left(\alpha^{'}\right)\right\}$, $\left\{\sqrt{b_1}\left(\alpha^{'}\right)\right\}$, gdzie $\pm\sqrt{b_1}\left(\alpha^{'}\right)$ oznacza dolny i górny kwantyl rzędu $\alpha^{'}$ rozkładu $\sqrt{b_1}$, a ${}_2b_2\left(\alpha^{'}\right)$ i ${}_1b_2\left(\alpha^{'}\right)$ dolny i górny kwantyl rzędu $\alpha^{'}$ rozkładu b_2.

Własności testów przedstawionych w tej części artykułu zostały omówione między innymi w książce C. Domańskiego [1990; por. także: Domański i in., 2014].

2. Test Jarque-Bera

Jednym z założeń metody największej wiarygodności przy estymacji modelu ARMA jest normalność rozkładu składnika losowego. Niespełnienie tego założenia sprawia, że niektóre statystyki nie mają przyjętych rozkładów. Odrzucenie hipotezy o normalności rozkładu składnika losowego może również wskazywać na występowanie nieliniowych zależności w procesie generującym analizowaną zmienną. Z tego względu warto dokonać weryfikacji następującego zestawu hipotez:

$$\begin{aligned} &H_0: \varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \\ &H_1: \sim\left(\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)\right) \end{aligned} \tag{19}$$

Najczęściej stosowany jest test Jarque i Bera [1987]. Test ten wykorzystuje fakt, że dla zmiennej losowej x_t o standardowym rozkładzie $N(0,1)$ skośność wynosi zero $\left(E\left(x_t^3\right)=0\right)$, zaś kurtoza jest równa 3 $\left(E\left(x_t^4\right)=3\right)$. Oznaczamy przez u_t standaryzowane reszty modelu ARMA: $u_t = \frac{e_t}{\hat{\sigma}_e}$, gdzie $\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} e_t^2$. Przy prawdziwości hipotezy zerowej statystyka:

$$JB = \frac{T}{6}\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} u_t^3}{T}\right)^2 + \frac{T}{24}\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} u_t^4}{T}\right)^2 \tag{20}$$

ma rozkład χ^2 o 2 stopniach swobody. Wartość statystyki JB powyżej wartości krytycznej, która przy 5% poziomie istotności wynosi 5,99, wskazują, że są podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej.

Test Jarque-Bera oparty jest na miarach skośności i spłaszczenia (kurtozy) rozkładu i jest testem omnibus, ponieważ uwzględnia jednocześnie odstępstwa od normalności wywołane zarówno przez odstępstwa skośności, jak i spłaszczenia.

Statystyka testu Jarque-Bera najczęściej przedstawiona jest wzorem:

$$JB = n\left[\frac{\left(\sqrt{b_1}\right)^2}{6} + \frac{(b_2 - 3)^2}{24}\right] \tag{21}$$

Wydzielając pierwszy składnik, uwzględniający jedynie skośność rozkładu, przyjmuje postać:

$$JB_1 = n\frac{\left(\sqrt{b_1}\right)^2}{6} \tag{22}$$

Statystyka ta przy założeniu prawdziwości hipotezy $H_0 : \sqrt{\beta_1} = 0$ ma asymptotyczny rozkład χ^2 o jednym stopniu swobody.

Wyodrębniając drugi składnik z wzoru (24), otrzymujemy:

$$JB_2 = n\frac{(b_2 - 3)^2}{24} \tag{23}$$

Statystyka (23), przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej $H_0 : \ \beta_2 = 3$, ma asymptotyczny rozkład χ^2 o jednym stopniu swobody.

A. Bera i S. John [1983] stwierdzili, że statystyki (22) i (23) nie są poprawnymi testami skośności i kurtozy, ponieważ asymptotyczny rozkład tych statystyk jest wyprowadzony przy założonej normalności. W szczególności niepoprawne są wykorzystane w tych statystykach wzory określające asymptotyczną wariancję. Godfrey i Orme [1991] zaproponowali odpowiednią modyfikację, poszerzając zakres zastosowań tego testu zwłaszcza do badania rozkładów o grubych ogonach [por. Bera, Premarante, 2001].

Znalezienie formuły dla wariancji statystyk $\sqrt{b_1}$ oraz b_2 [por. Bera, John, 1983], które będą poprawne w przypadku błędnej specyfikacji modelu, umożliwia wykorzystanie rodziny rozkładów Pearsona oraz zastosowanie modyfikacji White'a [1987].

Zmodyfikowana statystyka przyjmuje postać:

$$RS = n\frac{\left(\sqrt{b_1}\right)^2}{9 + m_6 m_2^{-3} - 6m_4 m_2^{-2}} \tag{24}$$

gdzie:

m_k oznaczają odpowiednie *k*-te momenty zwykłe rozkładu zmiennej losowej

Statystyka (24) przy założeniu prawdziwości hipotezy: $H_0 : \sqrt{\beta_1} = 0$ ma również asymptotyczny rozkład χ^2 o jednym stopniu swobody.

Własności rozważanych testów opartych na statystykach (22) (24) zostały zbadane metodą Monte Carlo. Wyniki tych badań zostały przedstawione w tab. 1 i 2.

Tab. 1. Oszacowania rozmiarów testów skośności (asymetrii) na podstawie 10 000 powtórzeń

Wielkość próby	Test			
	Standardowy (JB_1)		Zmodyfikowany (RS)	
	α=5%	α=1%	α=5%	α=1%
Rozkład N (0,1)				
30	3.29	0.83	3.88	0.59
50	4.35	1.07	4.43	0.71
100	4.88	1.12	4.55	0.81
200	4.83	0.89	4.51	0.63
250	4.74	0.91	4.68	0.81
300	4.96	0.89	4.96	0.73
400	5.17	1.06	4.81	0.90
500	4.99	0.91	5.00	0.85
600	4.88	1.05	4.73	0.80
700	4.62	0.94	4.42	0.65
800	4.92	1.05	5.00	0.82
900	4.52	0.89	4.43	0.78
1000	5.18	0.87	4.98	0.88
Rozkład Studenta t_7				
30	15.36	7.71	3.08	0.39
50	20.93	11.99	2.66	0.35
100	27.85	17.45	3.02	0.27
200	33.48	22.27	3.44	0.31
250	34.72	23.29	2.81	0.20
300	36.79	24.98	3.28	0.39
400	37.72	26.16	3.45	0.34
500	39.91	27.27	3.50	0.36
600	39.65	28.12	3.38	0.37
700	41.44	29.09	3.67	0.43
800	41.72	29.94	3.50	0.30
900	43.05	30.91	3.65	0.33
1000	43.29	31.47	3.68	0.57
Rozkład Beta (2,2)				
30	0.17	0.01	3.05	0.63
50	0.11	0.00	3.03	0.53
100	0.17	0.00	3.39	0.42
200	0.11	0.00	2.79	0.41
250	0.04	0.00	2.75	0.44
300	0.07	0.00	3.17	0.37
400	0.10	0.00	2.96	0.47
500	0.14	0.00	3.16	0.53
600	0.08	0.00	3.04	0.50
700	0.11	0.00	2.73	0.39
800	0.08	0.00	2.80	0.42
900	0.13	0.00	2.89	0.41
1000	0.06	0.00	2.98	0.45
Rozkład Laplace'a (λ=2)				
30	26.18	15.49	2.85	0.19
50	33.47	21.58	2.28	0.14
100	39.74	27.50	2.74	0.18
200	44.07	31.77	3.05	0.32
250	46.07	33.10	3.06	0.16
300	47.49	35.26	3.41	0.29
400	47.73	35.08	3.41	0.34
500	48.56	36.13	3.59	0.31
600	49.30	36.77	3.65	0.32
700	49.95	37.05	3.68	0.33
800	49.34	37.49	4.00	0.46
900	50.83	38.22	3.96	0.44
1000	50.65	38.76	4.07	0.52

Źródło: obliczenia własne.

Tab. 2. Oszacowania mocy testów (JB_1) i (RS) metodą Monte Carlo oparte na 10 000 powtórzeń

Wielkość próby	Test			
	Standardowy (JB_1)		Zmodyfikowany (RS)	
	α=5%	α=1%	α=5%	α=1%
Rozkład χ^2_4				
30	60.90	39.24	85.02	58.70
50	87.79	70.81	97.51	91.58
100	99.68	97.91	99.99	99.90
200	100.00	100.00	100.00	100.00
250	100.00	100.00	100.00	100.00
300	100.00	100.00	100.00	100.00
400	100.00	100.00	100.00	100.00
500	100.00	100.00	100.00	100.00
Rozkład Beta (1,2)				
30	11.97	2.36	49.93	21.04
50	27.33	6.70	73.39	49.87
100	66.90	31.92	96.21	88.18
200	97.98	84.17	99.96	96.97
250	99.57	95.09	100.00	100.00
300	99.95	98.43	100.00	100.00
400	100.00	99.93	100.00	100.00
500	100.00	100.00	100.00	100.00
Rozkład Beta (2,1)				
30	12.78	36.87	2.15	14.85
50	26.96	61.62	7.03	35.59
100	68.04	92.60	31.55	76.87
200	97.78	99.87	85.19	99.01
250	99.68	100.00	94.82	99.86
300	99.93	100.00	98.64	99.99
400	100.00	100.00	99.96	100.00
500	100.00	100.00	100.00	100.00

Źródło: obliczenia własne.

Podane w tab. 1 wyniki dotyczące rozmiaru testów świadczą o tym, że rozmiar zmodyfikowanego testu opartego na statystyce *RS* jest bliski założonym poziomom istotności. Test JB_1 dla innych rozkładów niż normalny znacznie odbiega natomiast od przyjętego poziomu istotności zarówno dla α=0.05, jak i α=0.01. Ponadto test standardowy ze statystyką JB_1 daje błędne wyniki w przypadku występowania dużego spłaszczenia (kurtoza) (por. rozkład Laplace'a (λ=2)). W konsekwencji zbyt często powoduje błędne odrzucenie prawdziwej hipotezy mówiącej o symetrii.

W tab. 2 przedstawiono empiryczną moc testów Jarque-Bera (JB_1) oraz jego modyfikacji (RS) dla rozkładów od rozkładu normalnego χ^2 o czterech stopniach swobody oraz rozkładu Beta (1,2) i Beta (2,1). Otrzymane prawdopodobieństwa są oszacowaniami mocy testów. Zmodyfikowany test *RS* w porównaniu z testem JB_1 daje znacznie lepsze rezultaty. Cechuje się dobrymi właściwościami, dotyczącymi również mocy, nawet dla prób n=50 i dla α=0.05

Dla danych z rozkładu χ^2_4 i Beta (1,2) wyższą mocą charakteryzuje się zmodyfikowany test (RS). W przypadku rozkładu Beta (2,1) o ujemnej asymetrii standardowy test JB_1 dla mniejszych rozmiarów próby ma wyższe oszacowania mocy [por. Domański, 2010].

Prezentowane w tab. 1 i 2 wyniki potwierdzają tezę, że standardowy test Jarque-Bera daje błędne wyniki w przypadku występowania dużej kurtozy. Powoduje on zbyt częste, błędne odrzucenie prawdziwej hipotezy zerowej mówiącej o symetrii rozkładu. Zmodyfikowany test (RS) cechuje się dobrymi właściwościami odnoszącymi się do rozmiaru i mocy.

Podsumowanie

Testy normalności oparte na momentach ciągle są w kręgu zainteresowania badaczy [por. np. Oliveria, Oliveria, Seijas-Macias, 2016]. Autorzy aktualnie prowadzą analizy dotyczące własności tych testów dla wielowymiarowych rozkładów. Zainteresowania te wynikają m.in. z szerokich możliwości zastosowań na rynku finansowym, w szczególności badania skośności rozkładów, głównie stóp zwrotu.

Bibliografia

Bera A., John S., *Tests for Multivariate Normality with Pearson Alternatives*, "Comm Statist.-Theory Methods" 1983, No. 12.

Bera A., Premaratne G., *Adjusting the Tests for Symmetry on Application to S&P Index Returs*, 2001, http://office.soka.ac.jp/faculty/economics/DP/004.pdf [data dostępu: 10.04.2016].

D'Agostino R.B., Pearson E.S., *Tests for Departure from Normality. Empirical Results for the Distributions of b_2 and $\sqrt{b_1}$*, "Biometrika" 1973, Vol. 60, **DOI: https://doi.org/10.2307/2335012,https://doi.org/10.1093/biomet/60.3.613**.

Domański C., *Testy statystyczne*, PWE, Warszawa 1990.

Domański C., *Uwagi o testach Jarque'a-Bera*, „Przegląd Statystyczny" 2010, z. 4.

Domański C., Baszczyńska A., Pekasiewicz D., Witaszczyk A., *Testy statystyczne w procesie podejmowania decyzji*, Wydawnictwo UŁ, Łódź 2014.

Godfrey L.G., Orme C.D., *Testing for Skewness of Regression Disturbances*, "Economics Letters" 1991, Vol. 37, Issue 1.

Jarque C.M., Bera A.K., *A Tests of Observations and Regression Residuals*, "International Statistical Review" 1987, Vol. 55, **DOI: https://doi.org/10.2307/1403192**.

Mulholland H.P., *On the Null Distribution of $\sqrt{b_1}$ for Samples of Size at Most 25, with Tables*, "Biometrika" 1977, Vol. 64, **DOI: https://doi.org/10.1093/biomet/64.2.401,ht tps://doi.org/10.2307/2335708**.

Oliveria A., Oliveria T., Seijas-Macias A., *Skewness into the Product of Two Normally Distributed Variables and the Risk Consequences*, "REVSTAT – Statistical Journal" 2016, Vol. 14, No. 4.

Pearson E.S., Hartley H.O., *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. I, 3. ed., University Press, Cambridge 1966.

Pearson E.S., Hartley H.O., *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 2, Cambridge University Press, London 1972.

Stephens M.A., *Tests for Normality*, "Stanford University Department of Statistics Technical Reports" 1969, No. 152.

White H., *Specification Testing in Dynamic Models, Advanced in Econometrics, Fifth World Congress, 1, 1–58*, Cambridge University Press, New York 1987, **DOI: https://doi.org/10.1017/CCOL0521344301.001**.

Consistency Tests Based on Moments

In the paper we are going to present the results of the research on selected statistical tests based on moments. In particular, the well-known Jarque-Bera test properties have been compared and contrasted with its modification proposed by White (1987). According to the outcomes of the simulation studies, the modified Jarque-Bera statistic is recommended as the normality test because the standard Jarque-Bera test is based on skewness and kurtosis and their distributions are derived under normality assumption.

Testy zgodności oparte na momentach

W artykule zaprezentowano wyniki badań własności testów opartych na momentach. Ze względu na powszechne zastosowanie testu Jarque-Bera, zostały omówione własności tego testu w porównaniu z jego modyfikacją. W badaniach uwzględniono rozmiary testów i ich moc. W świetle uzyskanych wyników zmodyfikowana postać testu Jarque-Bera powinna być stosowana do badania normalności rozkładów, ponieważ standardowy test Jarque-Bera jest oparty na skośności i kurtozie, a ich rozkłady są wyprowadzane przy założonej normalności.